数理解析研究所講究録
第 1712 巻 2010 年 122-131

微分と一般微分の双対化について

中島　惇 (Atsushi Nakajima)
環太平洋大学・次世代教育学部
Faculty of Education for Future Generations,
International Pacific University

この小論の目的は, 環や加群の理論において重要な微分 (derivation) や一般微分 (generalized derivation) に対応する作用を余代数 (coalgebra) と余加群 (comodule) において考察し，微分等との基本的な関係を与えることである.

0. 記号と定義

以下, 特に断らない限り, k は単位元を持つ可換環, 写像はすべて k-線形写像, $\mathrm{Hom}(-, -) = \mathrm{Hom}_k(-, -)$, $\otimes = \otimes_k$ とする. また k-代数 A, k-余代数 C, A-両側加群, C-両側余加群については, 次のような記号を使うことにする. また写像としての 1 は恒等写像を意味する.

$A = (A, \mu, \eta)$ が k-代数とは, 代数構造が $\mu : A \otimes A \to A$, $\eta : k \to A$ で与えられ, 次が成り立つ：

$$\mu(\mu \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu), \quad \mu(1 \otimes \eta) = \mu(\eta \otimes 1) = 1.$$

$C = (C, \Delta, \varepsilon)$ が k-余代数とは, 余代数構造が $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to k$ で与えられ, 次が成り立つ：

$$(1 \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes 1)\Delta, \quad (1 \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes 1)\Delta = 1.$$

$M = (M, \psi^+, \psi^-)$ が A-両側加群とは, 右及び左 A-加群構造がそれぞれ $\psi^+ : M \otimes A \to M$, $\psi^- : A \otimes M \to M$ で与えられ，次が成り立つ：

$$\psi^+(\psi^+ \otimes 1) = \psi^+(1 \otimes \mu), \quad \psi^-(1 \otimes \psi^-) = \psi^-(\mu \otimes 1),$$
$$\psi^+(\psi^- \otimes 1) = \psi^-(1 \otimes \psi^+), \quad \psi^+(1 \otimes \eta) = \psi^-(\eta \otimes 1) = 1.$$

$N = (N, \rho^+, \rho^-)$ が C-両側余加群とは, 右及び左 C-余加群構造がそれぞれ $\rho^+ : N \to N \otimes C$, $\rho^- : N \to C \otimes N$ で与えられ，次が成り立つ：

$$(\rho^+ \otimes 1)\rho^+ = (1 \otimes \Delta)\rho^+, \quad (1 \otimes \rho^-)\rho^- = (\Delta \otimes 1)\rho^-,$$
$$(\rho^- \otimes 1)\rho^+ = (1 \otimes \rho^+)\rho^-, \quad (1 \otimes \varepsilon)\rho^+ = (\varepsilon \otimes 1)\rho^- = 1.$$

これらの定義は射影加群と入射加群の定義のように「矢印の向きをすべて反対向き」にして，お互いに得られる．その他, 余代数やホップ代数に関連することについて

は, [A], [S] を参照されたい.

よく知られているように, $C=(C,\ \Delta,\ \varepsilon)$ を余代数, $N=(N,\ \rho^+,\ \rho^-)$ を C-両側余加群とすれば, $C^*=\mathrm{Hom}(C,\ k)$ は C の余代数構造から自然に定義される次の代数構造

$$\circ : C^*\otimes C^* \to C^*,\quad (f\circ g)(c)=(f\otimes g)\Delta(c)\quad (\forall\ f,\ g\in C^*, c\in C)$$
$$\eta : k\to C^*,\quad \eta(\alpha)(c)=\alpha\varepsilon(c)\quad (\forall\ \alpha\in k)$$

によって k-代数であり, $N^*=\mathrm{Hom}(N,\ k)$ は次の作用によって C^*- 両側加群となる：

$$n^*\cdot f=(n^*\otimes f)\rho^+,\quad f\cdot n^*=(f\otimes n^*)\rho^-$$

一方, k-代数 A に対して, $A^*=\mathrm{Hom}(A,\ k)$ は一般に k-余代数ではない. このように関手 (functor) Hom が関係する場合は余代数や余加群における概念から, それに対応する代数や加群の概念が得られるが, k-代数 A や A-加群における諸性質が, k-余代数 C や C-余加群の性質から関手 Hom を通して, k-代数 A や A-加群に常に反映されるとは限らない. このような観点から一般微分に対応する余代数の概念としての一般余微分 (generalized coderivation) を定義し, 余微分及び一般余微分とその双対代数の微分及び一般微分との基本的関係を考察する.

$A=(A,\ \mu,\ \eta)$ を k-代数, $M=(M,\ \psi^+,\ \psi^-)$ を A-両側加群とする. $d : A\to M$ が微分 (derivation) とは, 任意の $a,\ b\in A$ に対して

$$d(ab)=d(a)b+ad(b)$$

が成り立つことである. これを図式 (diagram) で表し, 矢印を逆向きにして考えると, 余代数 $C=(C,\ \Delta,\ \varepsilon)$ と C-両側余加群 $N=(N,\ \rho^+,\ \rho^-)$ に対して, 次が得られる：

$$d : N\to C,\ \ s.t.\ \ \Delta d=(d\otimes 1)\rho^+ + (1\otimes d)\rho^-.$$

この性質を持つ d を N から C への余微分 (coderivation) という. このとき, $d^* : C^*\to N^*$ は任意の $f,\ g\in C^*$ に対して

$$d^*(f\circ g)=(f\otimes g)\Delta d=(fd\otimes g)\rho^+ + (f\otimes gd)\rho^- = d^*(f)\cdot g+f\cdot d^*(g)$$

となり, $d^* : C^*\to N^*$ は微分である. $d : A\to M$ が内部微分 (inner derivation) とは, 任意の $a\in A$ に対して, $d(a)=am-ma$ となる $m\in M$ が存在することである. これは図式では表しにくいが, 内部余微分 (inner coderivation) d を

$$d : N\to C,\quad \exists\ \xi\in N^*=\mathrm{Hom}(N,\ k)\ \ s.t.\ \ d=(\xi\otimes 1)\rho^+ - (1\otimes\xi)\rho^-$$

と定義すれば, $f\in C^*$ に対して

$$d^*(f)=f((\xi\otimes 1)\rho^+ - (1\otimes\xi)\rho^-)=(\xi\otimes f)\rho^+ - (f\otimes\xi)\rho^- = \xi\cdot f - f\cdot\xi$$

が成り立つから，$d^*: C^* \to N^*$ は ξ による内部微分である．このことから内部余微分の定義は妥当であると考えてよい．

さて，これらのことを一般微分に拡張しよう．

$f: A \to M$ が一般微分 (generalized derivation) とは，任意の a, $b \in A$ に対して，

$$f(ab) = f(a)b + af(b) + amb \quad (\forall\, a, b \in A)$$

となる $m \in M$ が存在することである．また $f(a) = am + na$ となる m, $n \in M$ が存在するとき，f を一般内部微分 (generalized inner derivation) という．上で定義した一般内部微分を $(f,\ m)$ で表すことにする．$m = 0$ のとき，$(f,\ 0)$ は微分である．文献 [B] において，M. Brešar はより一般的な形で一般微分を定義しているが，A が単位元を含んでいるときには，ここでの定義と同値である．一般微分についての基本的性質は [N2], [KN] など，またある条件を満たす環上での一般微分の性質は [H], [L] などに与えられているので、これらの文献を参照されたい．

さて，これに対応する一般余微分を次のように定義しよう．

$f: N \to C$ が一般余微分 (generalized coderivation) とは，次の条件を満たす $\xi \in N^*$ が存在することとする：

$$\Delta f = (f \otimes 1)\rho^+ + (1 \otimes f)\rho^- + (1 \otimes \xi \otimes 1)(\rho^- \otimes 1)\rho^+.$$

この一般余微分を $(f,\ \xi)$ と表す．また

$$f = (\xi \otimes 1)\rho^+ + (1 \otimes \gamma)\rho^-$$

となる ξ, $\gamma \in M^*$ が存在するとき，f を一般内部余微分 (generalized inner coderivation) という．

1. いくつかの補題

ここでは一般余微分についての最も基本的な 2, 3 の補題を与える．

補題 1.1 N を C-両側余加群とするとき，次が成り立つ．

(1) $f: N \to C$ が余微分ならば，$f^*: C^* \to N^*$ は微分であり，$(f,\ \xi): N \to C$ が一般余微分ならば，$(f^*,\ \xi): C^* \to N^*$ は一般微分である．

(2) $d: N \to C$ が余微分ならば，$\varepsilon d = 0$ である．

(3) $(f,\ \xi): N \to C$ が一般余微分ならば，$\varepsilon f + \xi = 0$ であり，

$$d_1 = f + (\xi \otimes 1)\rho^+,\quad d_2 = f + (1 \otimes \xi)\rho^- : N \to C$$

はともに余微分である．

(4) 任意の k-線形写像 $f: N \to k$ に対して, $((f \otimes 1)\rho^+,\ -f)$ は一般余微分である.

証明： (1) の前半はすでに示した. 後半は任意の $c^*,\ d^* \in C^*$ に対して, $(f,\ \xi)$ が一般余微分であることと C^* の N^* への作用に注意すれば,

$$\begin{aligned} f^*(c^* \circ d^*) &= (c^* \otimes d^*)\Delta f \\ &= (c^* \cdot f \otimes d^*)\rho^+ + (c^* \otimes d^* \cdot f)\rho^- + ((c^* \otimes \xi)\rho^- \otimes d^*)\rho^+ \\ &= f^*(c^*) \cdot d^* + c^* \cdot f^*(d^*) + c^* \cdot \xi \cdot d^* \end{aligned}$$

従って $(f^*,\ \xi)$ は一般微分である.

(2) $(1 \otimes \varepsilon)\Delta d = d = d + (1 \otimes \varepsilon d)\rho^-$ より, $(\varepsilon \otimes 1)(1 \otimes \varepsilon d)\rho^- = (1 \otimes \varepsilon d) = 0$. 従って $\varepsilon d = 0$.

(3) $(f,\ \xi)$ を一般余微分とすると, (1) と同様な計算で $\varepsilon f + \xi = 0$ となる. 次に N が C-両側余加群であることを利用すれば,

$$\Delta d_1 - (d_1 \otimes 1)\rho^+ - (1 \otimes d_1)\rho^- = \Delta(\xi \otimes 1)\rho^+ - (\xi \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \Delta)\rho^+ = 0$$

より d_1 は余微分である. 同様な計算で, d_2 も余微分であることがわかる.

(4) は一般余微分の定義から容易にわかる.

補題 1.2 $M,\ N$ を C-両側余加群, $g: M \to N$ を C-両側余加群の準同型写像とする. $(f,\ \xi): N \to C$ が一般余微分ならば, $(fg,\ \xi g): M \to C$ は一般余微分である.

証明： C-両側余加群 X の構造写を $\rho_X^+: X \to X \otimes C$, $\rho_X^-: X \to C \otimes X$ で表すことにする. このとき, $\rho_N^+ g = (g \otimes 1)\rho_N^+$, $\rho_N^- g = (1 \otimes g)\rho_M^-$ が成り立つから, Δfg を計算すれば, 補題が証明される.

補題 1.3 $(f,\ \xi),\ (g,\ \gamma): C \to C$ を一般余微分とし, $[f,\ g] = fg - gf$ とおく. このとき

$$([f,\ g],\ \xi g - \gamma f): C \to C$$

は一般余微分である.

証明： 一般余微分の定義から, 次のことがわかる：

$$\begin{aligned} \Delta(fg - gf) = &([f,\ g] \otimes 1 + 1 \otimes [f,\ g])\Delta \\ &+ (f \otimes 1 + 1 \otimes f)(1 \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta g \\ &- (g \otimes 1 + 1 \otimes g)(1 \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta - (1 \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta f, \end{aligned}$$

$$(1 \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta g$$
$$= (g \otimes 1 + 1 \otimes g)(1 \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \gamma \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta$$
$$+ (1 \otimes \xi g \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \xi \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\}\Delta,$$

$$(1 \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta f$$
$$= (f \otimes 1 + 1 \otimes f)(1 \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \xi \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta$$
$$+ (1 \otimes \gamma f \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \gamma \otimes \xi \otimes 1)(\Delta \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\}\Delta.$$

これらの関係を用いれば

$$\Delta[f,\ g] = ([f,\ g] \otimes 1 + 1 \otimes [f,\ g])\Delta + (1 \otimes (\xi g - \gamma f) \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta$$

となり，$([f,\ g],\ \xi g - \gamma f)$ は C から C への一般余微分である．

一般余微分 $(f,\ \xi), (g,\ \gamma) : C \to C$ に対して, ブラケット積を次で定義する：

$$[(f,\ \xi),\ (g,\ \gamma)] = ([f,\ g],\ \xi g - \gamma f).$$

このとき, C から C への一般余微分全体の集合 $g\mathrm{Coder}(C)$ はこのブラケット積によってリー代数となる．また $C^* = \mathrm{Hom}(C,\ k)$ は $\circ$ によって k-代数だから, 次のブラケット積でリー代数になる：

$$[f,\ g] = g \circ f - f \circ g = (g \otimes f - f \otimes g)\Delta, \quad (f,\ g \in C^*).$$

次にこれらの間の関係を調べよう．

2. 一般微分と微分との関係

一般微分と微分の関係については，次の定理は最も基本的であり，これは補題 1.1 より容易にわかる：

定理 2.1 C-両側余加群 M に対して, 次の 4 つの写像が定義できる：

$$\psi_M : \mathrm{Coder}(M,\ C) \ni d \mapsto (d,\ 0) \in g\mathrm{Coder}(M,\ C),$$
$$\psi'_M : g\mathrm{Coder}(M,\ C) \ni (f,\ \xi) \mapsto f + (\xi \otimes 1)\rho^+ \in \mathrm{Coder}(M,\ C),$$
$$\varphi_M : g\mathrm{Coder}(M,\ C) \ni (f,\ \xi) \mapsto -\xi \in \mathrm{Hom}(M,\ k),$$
$$\varphi'_M : \mathrm{Hom}(M,\ k) \ni \xi \mapsto ((\xi \otimes 1)\rho^+,\ -\xi) \in g\mathrm{Coder}(M,\ C).$$

このとき，$\psi'_M \psi_M = 1,\ \varphi_M \varphi'_M = 1$ である．従って

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coder}(M,\ C) \xrightarrow{\psi_M} g\mathrm{Coder}(M,\ C) \xrightarrow{\varphi_M} \mathrm{Hom}(M,\ k) \longrightarrow 0$$

は k-加群の分裂する (split) 完全系列 (exact sequence) である．ここで, $\mathrm{Coder}(M,\ C)$ 及び $g\mathrm{Coder}(M,\ C)$ はそれぞれ C-両側余加群 M から C への余微分及び一般余微分全体の集合である．

これより，C-両側余加群の圏から k-加群の圏への関手としての次の同型が得られる：

$$g\mathrm{Coder}(-,\ C) \cong \mathrm{Coder}(-,\ C) \oplus \varepsilon\mathrm{Hom}(-,\ k).$$

一方 [D] において，ユニヴァーサルな余微分が定義されている, すなわち, L を $\Delta : C \to C \otimes C$ の余核 (cokernel) とする．このとき, $\omega : C \otimes C \to L$ を自然な準同型写像とすれば,

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\omega} L \longrightarrow 0$$

は C-両側余加群の完全系列である．λ を

$$\lambda : L \ni \omega(c \otimes c') \mapsto c\varepsilon(c') - \varepsilon(c)c' \in C$$

と定義し，$\mathrm{Com}_C(M,\ L)$ を M から L への C-両側余加群としての写像全体とすれば，λ は余微分であり，次の意味でユニヴァーサルなものである ([D, 命題 13])：

任意の C-両側余加群 M に対して, 写像

$$\mathrm{Com}_C(M,\ L) \ni \sigma \mapsto \lambda\sigma \in \mathrm{Coder}(M,\ C)$$

は k-加群の同型写像である．このとき, 定理 2.1 より次が成り立つ．

系 2.2 任意の C-両側余加群 M に対して，次は k-加群の同型写像である：

$$\Phi : \mathrm{Com}_C(M,\ L) \oplus M^* \ni (\sigma,\ \xi) \mapsto (\lambda\sigma + (\xi \otimes 1)\rho^+,\ -\xi) \in g\mathrm{Coder}(M,\ C).$$

次に微分と一般微分、余微分と一般余微分との関係を与える．

M を C-両側余加群とする．C^* は k-代数で，M^* は C^*-両側加群であるから，$\mathrm{Der}(C^*,\ M^*)$ 及び $g\mathrm{Der}(C^*,\ M^*)$ をそれぞれ C^* から M^* への微分全体及び, 一般微分全体の集合とすれば, [N2] より次の完全系列が得られる：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(C^*,\ M^*) \xrightarrow{\psi_{M^*}} g\mathrm{Der}(C^*,\ M^*) \xrightarrow{\varphi_{M^*}} M^* \longrightarrow 0.$$

ここで

$$\psi_{M^*}(\alpha) = (\alpha,\ 0), \quad \varphi_{M^*}(\beta,\ m^*) = m^*$$

$\alpha \in \mathrm{Der}(C^*,\ M^*)$, $\beta \in g\mathrm{Der}(C^*,\ M^*)$, $m^* \in M^*$ である．このとき, 余微分 $f : M \to C$ から微分 $f^* : C^* \to M^*$ が導かれるから, 次の k-線形写像が得られ

$$\theta : \mathrm{Coder}(C,\ M) \ni f \mapsto f^* \in \mathrm{Der}(C^*,\ M^*),$$

さらに一般余微分 $(f,\ \xi): M \to C$ から次の一般微分が得られる：

$$(f^*,\ \xi): C^* \to M^*.$$

定理 2.1 とこれらの結果をまとめれば, 次が成り立つ：

定理 2.3 任意の C-両側余加群 M について，次は k-加群の可換図式であり，それぞれの行は分裂する完全系列である：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Coder}(M,\ C) & \xrightarrow{\psi_M} & g\mathrm{Coder}(M,\ C) & \xrightarrow{\varphi_M} & M^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}(C^*,\ M^*) & \xrightarrow{\psi_M^*} & g\mathrm{Der}(C^*,\ M^*) & \xrightarrow{\varphi_M^*} & M^* & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

ここで，$\theta_0(f) = f^*$ $(f \in \mathrm{Coder}(M,\ C))$ である．特に k が体ならば，θ_0 は単射であり、従って θ も単射である.

系 2.4 次はリー代数の可換図式で，それぞれの行は分裂する完全系列である：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Coder}(C) & \xrightarrow{\psi_C} & g\mathrm{Coder}(C) & \xrightarrow{\phi_M} & C^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}(C^*) & \xrightarrow{\psi_M^*} & g\mathrm{Der}(C^*) & \xrightarrow{\phi_C^*} & C^* & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

定理 2.3 と系 2.4 における θ_0 の同型は C が有限生成 k-加群であればよい.

4. 分離多元環と余分離多元環についての注意

k-代数 A について, 積写像 $\mu: A \otimes A \to A$ が A-両側加群として分裂 (split) するとき, A を 分離多元環という．よく知られているように，A が 分離多元環であることと, 任意の A-両側加群 M に対して, 微分 $d: A \to M$ が内部的であることは同値である.

補題 3.1 A-両側加群 M について，次は同値である.

(1) 任意の微分 $d: A \to M$ は内部微分である.

(2) 任意の一般微分 $(f,\ m): A \to M$ は一般内部微分である.

証明: (1) $\Longrightarrow$ (2). $(d,\ m)$ が一般微分とすれば, $(d+m_\ell)(a) = d(a)+ma$ は微分であるから，$(d+m_\ell)(a) = ax - xa$ $(x \in M)$ となる．これより，$d(a) = ax+(-m-x)a$. 従って，d は一般内部微分である.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 微分 $d: A \to M$ は一般微分だから, 一般内部微分である．このとき，$d(a) = ax + ya$ $(x,\ y \in M)$ であるが，$d(1) = x + y = 0$ より，$y = -x$ となるから，d は内部微分である.

これより, 次のことが容易にわかる.

定理 3.2 k-代数 A が分離多元環であるための必要十分条件は, 任意の一般微分 $(d,\ m): A \to M$ が一般内部微分となることである.

k-余代数 C については, 写像 $\Delta: C \to C \otimes C$ が C- 両側余加群として分裂するとき, C を分離余多元環という. 分離多元環と同様に, 次のことが示されている.

C が余分離的であるための条件は, C-両側余加群 N に対して, 任意の余微分 $f: N \to C$ が内部余微分である.

補題 3.3 C-両側余加群 N について, 次は同値である.

(1) 任意の余微分 $f: N \to C$ は内部余微分である.

(2) 任意の一般余微分 $(f,\ \xi): N \to C$ は一般内部余微分である.

証明: (1) $\Longrightarrow$ (2). $(f,\ \xi)$ を一般余微分とする. $g = f + (\xi \otimes 1)\rho^+$ とおけば, f が一般余微分であるから

$$\Delta g = (f \otimes 1)\rho^+ + (1 \otimes f)\rho^- + (1 \otimes \xi \otimes 1)(\rho^- \otimes 1)\rho^+ + (\xi \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \Delta)\rho^+.$$

従って

$$\begin{aligned}\Delta g - (g \otimes 1)\rho^+ - (1 \otimes g)\rho^- = (1 \otimes \xi \otimes 1)((\rho^- \otimes 1)\rho^+ - (1 \otimes \rho^+)\rho^-) \\ + (\xi \otimes 1 \otimes 1)((1 \otimes \Delta)\rho^+ - (\rho^+ \otimes 1)\rho^+).\end{aligned}$$

N は C-両側余加群だから,

$$(\rho^- \otimes 1)\rho^+ = (1 \otimes \rho^+)\rho^-, \ (1 \otimes \Delta)\rho^+ = (\rho^+ \otimes 1)\rho^+$$

が成り立つ. よって, $\Delta g = (g \otimes 1)\rho^+ + (1 \otimes g)\rho^-$. これより g は余微分であるから, $\lambda \in N^*$ が存在して, $g = (\lambda \otimes 1)\rho^+ - (1 \otimes \lambda)\rho^-$ となる. これより,

$$f = ((\lambda - \xi) \otimes 1)\rho^+ + (1 \otimes (-\lambda))\rho^-$$

は一般内部微分である.

(2) $\Longrightarrow$ (1). f を余微分とすれば, $f = (f,\ 0)$ は一般余微分だから, 一般内部余微分である. 従って, $\xi,\ \gamma \in N^*$ が存在して, $f = (\xi \otimes 1)\rho^+ + (1 \otimes \gamma)\rho^-$ となる. このとき, 補題 1.1 (2) より

$$0 = \varepsilon f = (\xi \otimes 1)(1 \otimes \varepsilon)\rho^+ + (1 \otimes \gamma)(\varepsilon \otimes 1)\rho^- = \xi + \gamma.$$

これより $\gamma = -\xi$. よって f は内部余微分である.

この補題より分離余多元環についても分離多元環と同様に, 次が成り立つ.

定理 3.4 k-余代数 C が分離余多元環であるための必要十分条件は, 任意の一般余微分 $(f,\,\xi): N \to C$ が一般内部余微分となることである.

環の分離拡大などに対応して, 余多元環の余分離拡大 (coseparable coextension) が [N1] で取り扱われた. すなわち, 2つの k-余代数 C, D に対して, 余代数準同型 $\varphi: C \to D$ を考え, C の余代数構造を $\Delta_C : C \to C \otimes C$ とすれば, C は次の構造で D-両側余加群となる：

$$\rho^+ = (1 \otimes \varphi)\Delta_C : C \to C \otimes C \to C \otimes D,$$
$$\rho^- = (\varphi \otimes 1)\Delta_C : C \to C \otimes C \to D \otimes C.$$

このとき, $\mathrm{Ker}(\rho^+ \otimes 1 - 1 \otimes \rho^-)$ を D 上 C の余テンソル積 (cotensor product) といい, $C\Box_D C$ で表わす, すなわち,

$$0 \longrightarrow C\Box_D C \longrightarrow C \otimes C \xrightarrow{\rho^+\otimes 1 - 1\otimes\rho^-} C \otimes D \otimes C$$

は C-両側余加群の完全系列である. $(\rho^+ \otimes 1)\Delta_C = (1 \otimes \rho^-)\Delta_C$ より,

$$\Delta_C : C \to C\Box_D C$$

であるから, 環拡大 A/B において B 上のテンソル積 $A \otimes_B A$ を考察したように D 上の余テンソル積 $C\Box_D C$ が考察できる. また C-両側余加群 N は

$$(1 \otimes \varphi)\rho^+ : N \to N \otimes C \to N \otimes D, \quad (\varphi \otimes 1)\rho^- : N \to C \otimes N \to D \otimes N$$

によって D-両側余加群となるから, $N\Box_D C$, $C\Box_D N$ なども同様に考えられる. 従って, ここで取り扱われた k-余代数 C と C-両側余加群 M についての余微分や一般余微分についての結果は余テンソル積を用いて, 上の意味での余代数拡大 C/D にまで拡張することができる ([N3]).

参考文献

[A] 阿部英一：ホップ代数, 岩波書店, 1977.

[B] M. Brešar : On the distance of the compositions of two derivations to generalized derivations, Glasgow Math. J. **33** (1991), 89-93.

[D] Y. Doi : Homolpgical coalgebra, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), 31-50.

[H] B. Hvala : Generalized derivations in rings, Comm. Algebra **26** (1998), 1147-1166.

[KN] H. Komatsu and A. Nakajima : Generalized derivations of associative algebras, Quaestiones Mathematicae **26** (2003), 213-235.

[J] D. W. Jonah : Cohomology for coalgebras, Mem. Amer. Math. Soc. **82** (1968).

[L] Tsin-Kwen Lee : Generalized derivations of left faithful rings, Comm. Algebra **27** (1999), 4057-4073.

[N1] A. Nakajima : Coseparable coalgebras and coextensions of coderivations, Math. J. Okayama Univ. **22** (1980), 145-149.

[N2] A. Nakajima : Categorical properties of generalized derivations, Scientiae Mathematicae **2** (1999), 345-352.

[N3] A. Nakajima : On generalized coderivations, in preparation.

[S] M. E. Sweedler : Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

327-1, Nakaku, Nakai, Okayama 703-8205, JAPAN
E-mail: a2017bj.naka@hi2.enjoy.ne.jp
(上記所属は 2010 年 3 月までです.)